جامعة البعث　　　تحليل عقدي /2/　　　اسم الطالب : [illegible]

القسم الرياضيات – كلية العلوم　　　الدورة الصيفية　　　2017-2016

السؤال الأول : (20+10 =30درجة)

1"- أوجد نشر لورانت للدالة $f(z)=\frac{z-2}{z^2-z}$ في النطاق $1<|z-1|$.

ثمّ من النشر السابق حدد نوع نقطة اللانهاية وقيمة الراسب عندها .

2"- عين النقاط من $|z|\leq 1$ التي تبلغ عندها الدالة $f(z)=iz^3+z$ قيمتهاالعظمى .

السؤال الثاني : (30درجة)

أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية

$$f(z)=\frac{1}{z^2 shz}e^{\frac{1}{z-\pi}} \;\&\; f(z)=\frac{2z+\pi}{\cos 2z+1} \;\&\; f_1(z)=\frac{\pi z-4}{\sin z+\cos z}e^{\frac{2}{z-i}}$$

السؤال الثالث : (20درجة)

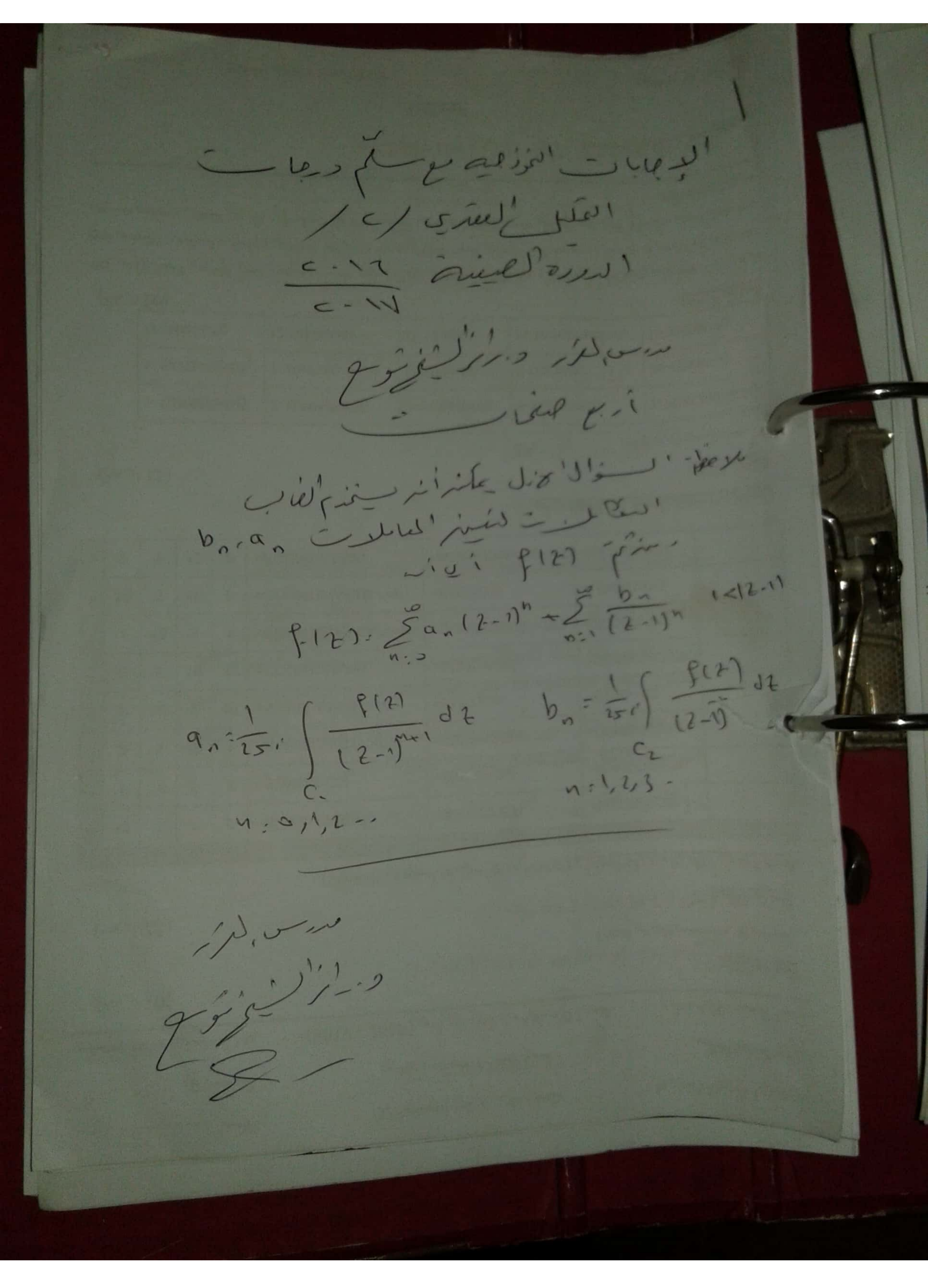
أعتمادا على نظرية الرواسب أوجد قيمة

$$I_2=\int_{|z|=2}\frac{ze^{\cos z}}{\sin 2z}dz \;\&\; I_1=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{2z}{(z^3-1)^2(z+2)}dz$$

السؤال الرابع : (20درجة)

1"- احسب قيمة التكامل $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

$2\theta=\pi+2n\pi \Rightarrow$



١

الإجابات النموذجية مع سلم درجات

التحليل العقدي / ٢ /

الدورة الصيفية $\frac{٢٠١٦}{٢٠١٧}$

مدرس المقرر د. نزار الشيخ شوحة

أربع صفحات

ملاحظة: السؤال الأول يمكن أن يستخدم الطالب السلاسل لتمييز المعاملات b_n, a_n ستخدم $f(z)$ أي أن

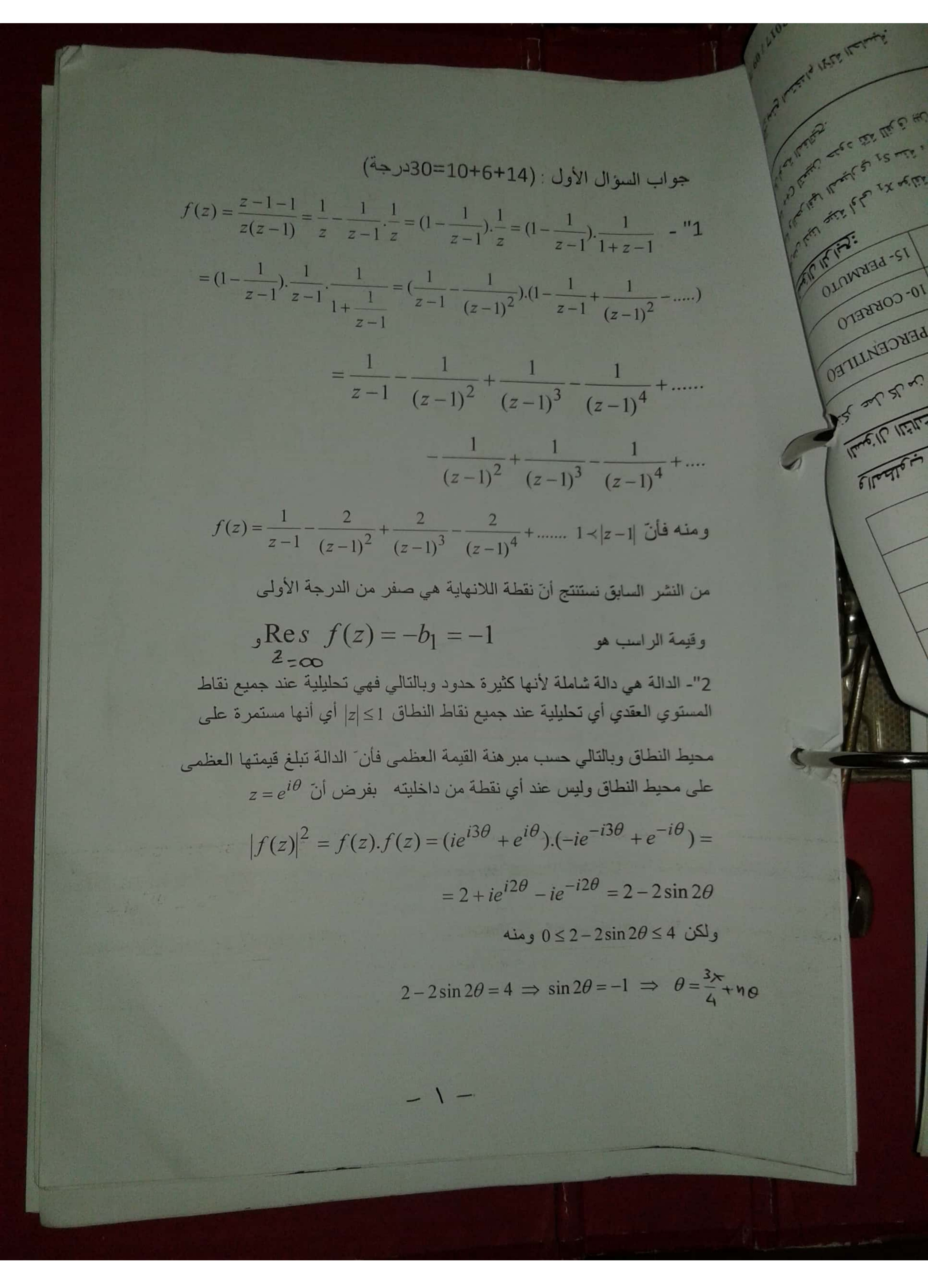
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-1)^n} \quad 1<|z-1|$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}} dz \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}} dz$$

$n = 0, 1, 2 \ldots$ $\qquad$ $n = 1, 2, 3 \ldots$

مدرس المقرر

د. نزار الشيخ شوحة



جواب السؤال الأول : (14+6+10=30درجة)

"1 - $f(z)=\frac{z-1-1}{z(z-1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}.\frac{1}{z}=(1-\frac{1}{z-1}).\frac{1}{z}=(1-\frac{1}{z-1}).\frac{1}{1+z-1}$

$$=(1-\frac{1}{z-1}).\frac{1}{z-1}.\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}).(1-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}-.....)$$

$$=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}-\frac{1}{(z-1)^4}+......$$

$$-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}-\frac{1}{(z-1)^4}+....$$

ومنه فأنّ $1<|z-1|$ .... $f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}-\frac{2}{(z-1)^4}+.......$

من النشر السابق نستنتج أنّ نقطة اللانهاية هي صفر من الدرجة الأولى

وقيمة الراسب هو $\underset{z=\infty}{Res}\ f(z)=-b_1=-1$ و

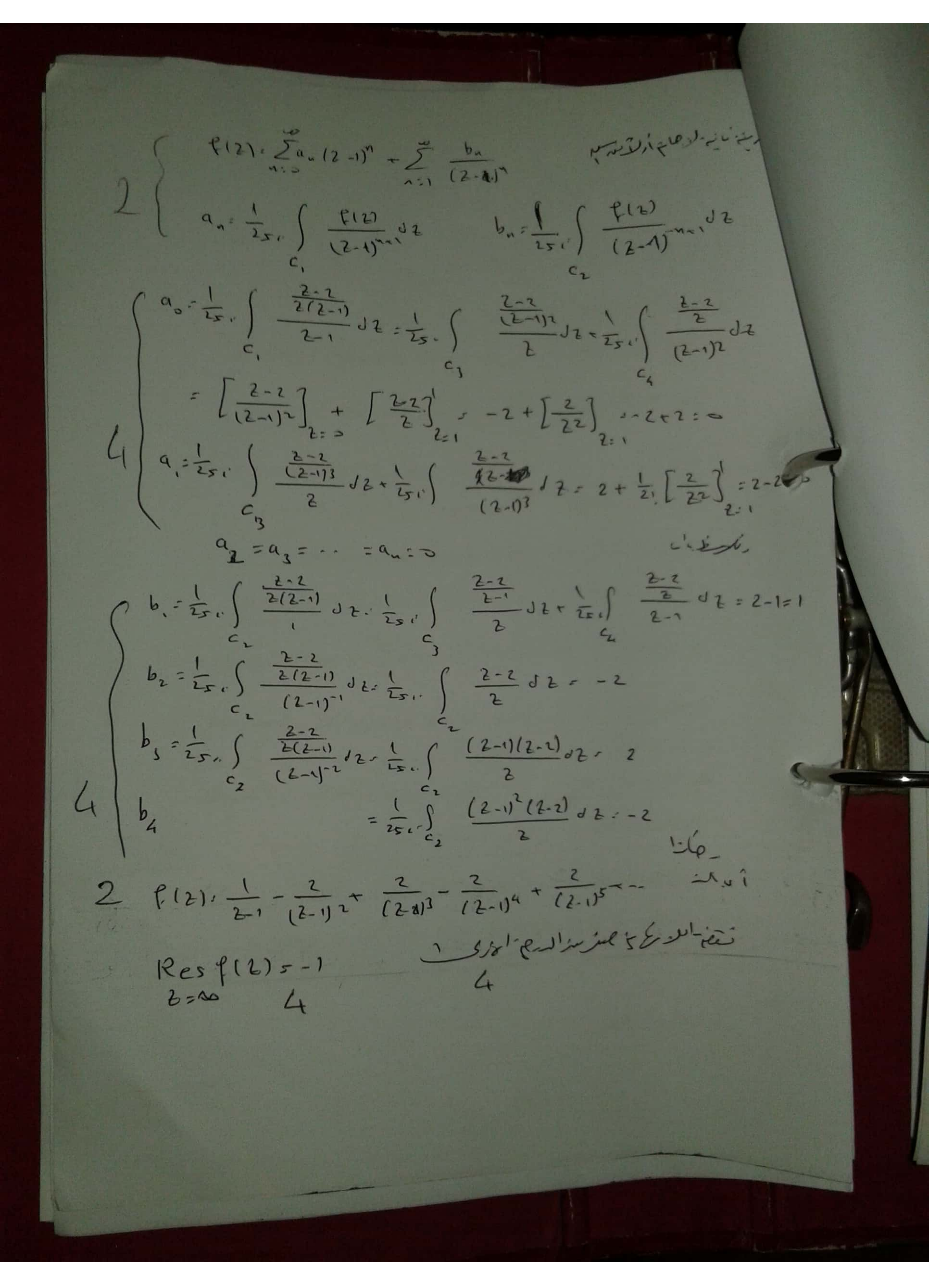
2"- الدالة هي دالة شاملة لأنها كثيرة حدود وبالتالي فهي تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي أي تحليلية عند جميع نقاط النطاق $|z|\le 1$ أي أنها مستمرة على محيط النطاق وبالتالي حسب مبرهنة القيمة العظمى فأنّ الدالة تبلغ قيمتها العظمى على محيط النطاق وليس عند أي نقطة من داخليته بفرض أنّ $z=e^{i\theta}$

$$|f(z)|^2=f(z).f(z)=(ie^{i3\theta}+e^{i\theta}).(-ie^{-i3\theta}+e^{-i\theta})=$$

$$=2+ie^{i2\theta}-ie^{-i2\theta}=2-2\sin 2\theta$$

ولكن $0\le 2-2\sin 2\theta\le 4$ ومنه

$$2-2\sin 2\theta=4\Rightarrow \sin 2\theta=-1\Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}+n\theta$$



2 $\left\{ \begin{array}{l} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-1)^n} \\ a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}} dz \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}} dz \end{array} \right.$

4 $\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{\frac{z-2}{z(z-1)}}{z-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_3} \frac{\frac{z-2}{(z-1)^2}}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_4} \frac{\frac{z-2}{z}}{(z-1)^2} dz \\ = \left[\frac{z-2}{(z-1)^2}\right]_{z=0} + \left[\frac{z-2}{z}\right]'_{z=1} = -2 + \left[\frac{2}{z^2}\right]_{z=1} = -2+2 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_3} \frac{\frac{z-2}{(z-1)^3}}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\frac{z-2}{z}}{(z-1)^3} dz = 2 + \frac{1}{2!}\left[\frac{2}{z^2}\right]'_{z=1} = 2-2 = 0 \end{array} \right.$

$a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$

4 $\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{\frac{z-2}{z(z-1)}}{1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_3} \frac{\frac{z-2}{z-1}}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_4} \frac{\frac{z-2}{z}}{z-1} dz = 2-1 = 1 \\ b_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{\frac{z-2}{z(z-1)}}{(z-1)^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{z-2}{z} dz = -2 \\ b_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{\frac{z-2}{z(z-1)}}{(z-1)^{-2}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{(z-1)(z-2)}{z} dz = 2 \\ b_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{(z-1)^2(z-2)}{z} dz = -2 \end{array} \right.$

2 $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} - \frac{2}{(z-1)^4} + \frac{2}{(z-1)^5} - \cdots$

$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$ 4

4

من أجل $n=0$ $\Leftarrow$ $\theta=\frac{3\pi}{4}$ $\Leftarrow$ $z_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$

من أجل $n=1$ $\Leftarrow$ $\theta=\frac{7\pi}{4}$ $\Leftarrow$ $z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$

جواب السؤال الثاني : $(30=10+10+10)$

*النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ هي جذور المعادلة $\sin z+\cos z=0$ أي

جذور المعادلة $\sin(z+\frac{\pi}{4})=0 \vee \cos(z-\frac{\pi}{4})=0$ ومنه إمّا

$z=-\frac{\pi}{4}+n\pi$ أو $z=\frac{3\pi}{4}+n\pi$ حيث $n=0,\pm1,\pm2,...$ وجميع هذه النقاط هي أقطاب بسيطة لأنها أصفار من الدرجة الأولى للمقام في الدالة f_1 ولا تعدم البسط كما أنّ النقطة $z=i$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة f_1

* النقاط الشاذة للدالة f_2 هي جذور المعادلة $\cos 2z+1=0$ ومنه فأنّ

$\cos 2z=-1 \Leftarrow 2z=\pi+2n\pi \Leftarrow z=\frac{\pi}{2}+n\pi$ حيث $n=0,\pm1,\pm2,..$

من أجل $n=-1$ $\Leftarrow$ $z=-\frac{\pi}{2}$ وبما أنها صفر من الدرجة الأولى للبسط وصفر من الدرجة الثانية للمقام فأنها قطب بسيط للدالة f_2 أمّا باقي النقاط فهي أقطاب ثنائية للدالة f_2 لأنها أصفار من الدرجة الثانية للمقام ولا تعدم البسط

* النقاط الشاذة للدالة f_3 هي جذور المعادلتين $z-\pi=0$, $z^2 shz=0$

وبما أنّ $z=\pi$ قطب للدالة $\frac{1}{z-\pi}$ فأنها نقطة شاذة أساسية للدالة f_3 ومن المعادلةالثانية نجد أنّ $shz=0 \Leftarrow z=0 \wedge z=ni\pi$ من أجل $n=0$ فأنّ النقطة $z=0$ قطب من الرتبةالثاثة أما من أجل باقي القيم فهي أقطاب بسيطة للدالة f_3

جواب السؤال الثالث :

جواب السؤال الثالث (20 = 10 + 10)

1"- $I_1 = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res} f(z, z_j)$

ا لنقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة $(z^3 - 1)^2.(z+2) = 0$

أي هي النقاط $z_1 = 2$, $z_2 = 1$, $z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_4 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

ومنه واعتمادا على العلاقة $\sum_{j=2}^{4} \operatorname{Res} f(z., z_j) + \operatorname{Res} f(z, z_1) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$

أي أن $\sum_{j=1}^{3} \operatorname{Res} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=-2} s(z) - \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z0$

ولكن $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$ و $\operatorname{Res}_{z=-2} f(z) = \frac{-4}{81}$ أي أن $\sum_{j=1}^{3} \operatorname{Res} f(z) = \frac{4}{81}$

ومنه فأن $I_1 = \frac{8i\pi}{81}$

2"- $I_2 = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res} f(z, z_j)$ النقاط الشاذة للدالة هي جذور المعادلة

$\sin 2z = 0$ ومنه فأن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$: $z = \frac{n\pi}{2}$ ومنه نستنتج أن

النقاط $z = 0$, $z_2 = -\frac{\pi}{2}$, $z_3 = \frac{\pi}{2}$ هي النقاط التي تقع داخل الكفاف

$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$, $\operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Res}_{z=-\frac{\pi}{4}} f(z) = -\frac{\pi}{4}$ ومنه فأن

$I_2 = 2i\pi(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 0) = 0$

جواب السؤال الرابع : (٢٥ درجة)

نفرض أنّ $0 \le \theta \le 2\pi$ $z = e^{i\theta}$ عندئذ $\sin\theta = \frac{1}{2i}(\frac{z^2-1}{z})$

ومنه فأنّ $I = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2+4iz-1} = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res} f(z, z_j)$

النقاط الشاذة هي $z_1 = (-2-\sqrt{3})i$, $z_2 = (-2+\sqrt{3})i$

النقطة z_2 تقع داخل الكفاف و $\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}}$ ومنه فأنّ

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

****

مدرس المقرر : د. رامز الشيخ فتوح